2.9.19 Logaritmické rovnice I

Předpoklady: 2915

Pedagogická poznámka: Stejně jako u exponenciálních rovnic a rozkladů na součin bereme logaritmické rovnice jako nácvik „výběru metody“. Sestavujeme si arzenál metod a na konci máme hodinu, ve které jsou pomíchané různé druhy rovnic a studenti musejí sami vybírat nejvhodnější metodu řešení.

Logaritmické rovnice - rovnice s neznámou v logaritmu.
Co máme k dispozici?

- definice logaritmu: $y = \log_a x$ právě když $x = a^y$,
- vzorce pro logaritmy: $\log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$, $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$,

  $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$, $\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}$.

Př. 1: Vyřeš rovnici $\log_2 x = 3$.

Podmínka: $x > 0$ (do logaritmu nemůžeme dosadit cokoliv).
Připomíná to nejjednodušší exponenciální rovnice typu $2^x = 8$.
Jde řešit zpaměti: Ptáme se, jaké číslo vznikne, když umocníme 2 (základ logaritmu) na třetí (hodnota logaritmu = hodnota exponentu).
Jde o číslo $2^3 = 8$. $K = \{8\}$

Jak postup zobecnit (ne všechno půjde zpaměti)?
Jako u exponenciálních rovnic, napíšeme pravou stranu jako logaritmus:

$\log_2 x = 3$

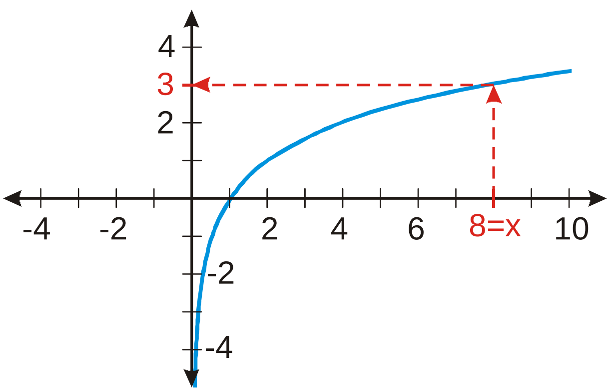
$\log_2 x = \log_2 2^3$

$\log_2 x = \log_2 8$

Rozebereme vzniklou rovnici:

- levá strana: $L = \log_2 x$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro neznámé číslo x
- pravá strana: $P = \log_2 8$ - hodnota funkce $y = \log_2 x$ pro číslo 8

Obě strany se mají rovnat $\Rightarrow$ funkce $y = \log_2 x$ má pro x i pro 8 stejnou hodnotu.



Z grafu je vidět, že funkce $y=\log_2 x$ je prostá (ke každému y má pouze jedno x) $\Rightarrow$ pokud má funkce $y=\log_2 x$ pro x i pro 8 stejnou hodnotu (konkrétně $y=3$) musí se x a 8 rovnat (existuje pouze jedna hodnota x, ze které se dostaneme přes logaritmus ke 3) $\Rightarrow$ $x=8$.

I všechny ostatní logaritmické funkce $y=\log_a x$ jsou prosté $\Rightarrow$ postup můžeme použít obecně.

Pokud se podaří logaritmickou rovnici upravit do tvaru $\log_a(\textit{výraz}1)=\log_a(\textit{výraz}2)$, můžeme přejít k rovnici $\textit{výraz}1=\textit{výraz}2$. Protože funkce $y=\log_a x$ je prostá, je tato úprava ekvivalentní. Této úpravě se říká odlogaritmování.

Při řešení rovnic budeme často potřebovat zapsat nějaké číslo jako logaritmus při určitém základu. Jak zapsat 3 jako logaritmus při základu 2?
Možné cesty:

- $3=3\cdot 1=3\cdot\log_2 2=\log_2 2^3$,
- $\log_2 x=3$ právě když $x=2^3$ (umocňujeme základ a hodnota logaritmu je exponent) .

Př. 2: Napiš následující čísla jako logaritmy při uvedeném základu:
a) $3\ \{\log_{10}\}$ b) $2\ \{\log_5\}$ c) $-1\ \{\log_{0,5}\}$ d) $0,5\ \{\log_4\}$
e) $0\ \{\log_\pi\}$ f) $\sqrt{2}\ \{\log_3\}$

a) $3=\log_{10}10^3=\log_{10}1000$ b) $2=2\log_5 5=\log_5 5^2=\log_5 25$
c) $-1=\log_{0,5}0,5^{-1}=\log_{0,5}2$ d) $0,5=\log_4 4^{0,5}=\log_4 2$
e) $0=\log_\pi \pi^0=\log_\pi 1$ f) $\sqrt{2}=\sqrt{2}\log_3 3=\log_3 3^{\sqrt{2}}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad tak sice vypadá jako ztráta času, ale rozhodně jí není. Studenti mají s převáděním čísel na logaritmy značné problémy (i když jde o trivialitu) a předchozí příklad jim ušetří při řešení rovnic hodně času.

Př. 3: Vyřeš rovnice:
a) $\log_2(x-2)=4$ b) $\log_3(2x+1)=2$ c) $\log_{0,5}(2-x)=-2$
d) $3\log_2(3x+1)=6$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=-1$
f) $\log_{0,5}\log_4 x=-4$ (jinak zapsáno $\log_{0,5}(\log_4 x)=-4$)

a) $\log_2(x-2)=4$
Podmínka: $x>2$ (nemůžeme dosadit cokoliv).
$\log_2(x-2)=4$
$\log_2(x-2)=\log_2 2^4$
$\log_2(x-2)=\log_2 16$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$
můžeme odlogaritmovat:

b) $\log_3(2x+1)=2$
Podmínka: $2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$
$\log_3(2x+1)=2$
$\log_3(2x+1)=\log_3 3^2$
$\log_3(2x+1)=\log_3 9$ - rovnost logaritmů $\Rightarrow$

$x-2=16$

$x=18 \qquad K=\{18\}$

můžeme odlogaritmovat:

$2x+1=9$

$2x=8$

$x=4 \qquad K=\{4\}$

c) $\log_{0,5}(2-x)=-2$

Podmínka: $2-x>0 \Rightarrow 2>x$

$\log_{0,5}(2-x)=-2$

$\log_{0,5}(2-x)=\log_{0,5}0,5^{-2}$

$\log_{0,5}(2-x)=\log_{0,5}4$ - odlogaritmujeme

$2-x=4$

$-2=x \qquad K=\{-2\}$

d) $3\log_2(3x+1)=6$

Podmínka: $3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$.

Problém: levá strana není logaritmus $\Rightarrow$ rovnici vydělíme

$\log_2(3x+1)=2$

$\log_2(3x+1)=\log_2 2^2$ - odlogaritmujeme

$3x+1=4$

$3x=3$

$x=1 \qquad K=\{1\}$

e) $\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=-1$

Podmínka: $x>-1$.

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$\log_{\frac{1}{3}}(1+x)=\log_{\frac{1}{3}}3$ - odlogaritmujeme

$1+x=3$

$x=2 \qquad K=\{2\}$

f) $\log_{0,5}\log_4 x=-4$

Podmínka: $x>0$.

$\log_{0,5}\log_4 x=\log_{0,5}0,5^{-4}$ - odlogaritmujeme

$\log_4 x=0,5^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^4=16$

$\log_4 x=\log_4 4^{16}$ - odlogaritmujeme

$x=4^{16} \qquad K=\{4^{16}\}$

Pedagogická poznámka: Studenti obcházejí trojku v bodě d) většinou nesmyslně převedením na třetí mocninu uvnitř. Připomínám jim, že nejdřív by měli zkoušet ty nejjednodušší cesty.
V bodě f) je třeba studenty popostrčit odstraněním prvního logaritmu.

Př. 4: Vyřeš rovnice:

a) $\log_2(x^2+x)=\log_2(-2x)$ b) $\log_2(x^2-x)=\log_2(3-3x)$

c) $2\log x=\log(x+6)$

a) $\log_2(x^2+x)=\log_2(-2x)$

Podmínky: $x^2+x>0$, $-2x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2(x^2+x)=\log_2(-2x)$

$x^2+x=-2x$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

b) $\log_2(x^2-x)=\log_2(3-3x)$

Podmínky: $x^2-x>0$, $3-3x>0$, zkontrolujeme dosazením až získáme kandidáty na kořeny.

$\log_2(x^2-x)=\log_2(3-3x)$

$x^2-x=3-3x$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -3$

Ověření podmínek:

$x_1 = 0$: $0^2 + 0 > 0$ - nevyhovuje

$x_2 = -3$: $(-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 > 0$

$-2x = -2(-3) = 6 > 0$

$K = \{-3\}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 1$

Ověření podmínek:

$x_1 = -3$: $(-3)^2 - (-3) = 9 + 3 > 0$

$3 - 3(-3) = 3 + 9 > 0$

$x_2 = 1$: $1^2 - 1 = 0$ - nevyhovuje

$K = \{-3\}$

c) $2\log x = \log(x+6)$

Podmínky: $x > 0$, $x + 6 > 0$, zkontrolujeme dosazením, až získáme kandidáty na kořeny.

$2\log x = \log(x+6)$ - nejde odlogaritmovat, levá strana není logaritmus

$\log x^2 = \log(x+6)$ - teď už můžeme odlogaritmovat

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Ověření podmínek:

$x_1 = 3$: $3 > 0$

$x_2 = -2$: $-2 < 0$ nevyhovuje

$K = \{3\}$

Př. 5: Vyřeš rovnice:

a) $\ln\log_2\log_{0,5} x = 0$ (jinak $\ln\left(\log_2\left[\log_{0,5} x\right]\right) = 0$)

b) $\log_8\left(2\log_3\left[1 + \log_2\left\{2 - \log_{0,5} x\right\}\right]\right) = \frac{1}{3}$

a) $\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

Podmínka: $x > 0$.

$\ln\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = \ln 1$ - odlogaritmujeme

$\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = 1$

$\log_2\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 2$ - odlogaritmujeme

$\log_{\frac{1}{2}} x = 2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ - odlogaritmujeme

$x = \frac{1}{4} \qquad K = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $\log_8\left(2\log_3\left[1 + \log_2\left\{2 - \log_{0,5} x\right\}\right]\right) = \frac{1}{3}$

Podmínka: $x > 0$.

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\log_8 8^{\frac{1}{3}}$

$\log_8\left(2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]\right)=\log_8 2$ - odlogaritmujeme

$2\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=2 \quad /:2$

$\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=1$

$\log_3\left[1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}\right]=\log_3 3$ - odlogaritmujeme

$1+\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=3$

$\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=2$

$\log_2\left\{2-\log_{0,5}x\right\}=\log_2 2^2$ - odlogaritmujeme

$2-\log_{0,5}x=4$

$-\log_{0,5}x=2$

$\log_{0,5}x=-2=\log_{0,5}0,5^{-2}$ - odlogaritmujeme

$x=4 \qquad K=\{4\}$

Př. 6: Petáková:
strana 35, cvičení 9 b), c), e), f), g), h)
strana 35, cvičení 10 c), d)

Shrnutí: $2=\log_a a^2$ a pak to odlogaritmujeme.